MATHEMATIQUES

(Option M) (2ème épreuve)

NOTA : Dans cette épreuve, il sera tenu compte de la qualité de la présentation : écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer chacun des résultats correspondant aux éléments encadrés dans l'énoncé, et eux-ci seulement.

Les trois premières parties sont indépendantes.

L'objet du problème est de calculer Z(2k), où Z est la fonction dzéta de Riemann et k un entier naturel non nul.

Préliminaire : Pour x réel donné, on considère la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels cette série converge.

Pour x élément de D, la somme de cette série est notée Z(x).

I - FORME DE Z(2k)

1°) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, définie par : $\forall x \in [0,\pi] \quad f(x) = x$.

a) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Déterminer les réels a_n, $n \in \mathbb{N}$, et b_n, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'expression

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$ constitue la série de Fourier de f.

c) f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

d) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

e) En déduire Z(2) $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)$.

2°) a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c à déterminer tels que :

$$\forall x \in [0,\pi] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = a + bx + cx^2 .$$

b) En déduire Z(2) d'une autre manière.

c) Rappeler la formule de Parseval et dans quels cas elle s'applique.

d) En déduire Z(4).

3°) a) Montrer que l'on peut intégrer l'expression du 2°)a), c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x \in [0,\pi] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = d - ax - b \cdot \frac{x^2}{2} + c \cdot \frac{x^3}{3}$$, et déterminer d.

b) En déduire Z(6).

4°) a) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \forall x \in [0,\pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx - k\cdot\frac{\pi}{2})}{n^k} = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k} \cdot \pi^{k-i} \cdot x^i$.

Déterminer $a_{0,2}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, une relation de récurrence entre $a_{i,k+1}$ et $a_{i-1,k}$ pour $i \geq 1$.

Donner une expression de $a_{0,k+1}$.

b) Evaluer $a_{0,2p+1}$.

c) Montrer par récurrence sur $k \geq 2$ que : $\forall i \in [0,k] \quad a_{i,k} \in \mathbb{Q}, \quad Z(2k) = r_k \cdot \pi^{2k}$ avec $r_k \in \mathbb{Q}$.

Déterminer r_1, r_2, r_3.

Nous avons ainsi la forme de Z(2k) et une méthode systématique pour calculer les r_k. Mais cette méthode est très longue. La suite du problème consiste à trouver une méthode de calcul plus rapide des r_k.

II - UN DEVELOPPEMENT DE COTANGENTE EN SERIE ENTIERE

1°) Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, on considère la fonction réelle g, 2π-périodique définie par :

$\forall x \in [-\pi,\pi[\quad g(x) = \cos(a \cdot x)$.

a) Déterminer les coefficients de Fourier α_n, $n \in \mathbb{N}$ et β_n, $n \in \mathbb{N}^*$, de g en fonction de a et de n.

b) Montrer que g est égale à la somme de sa série de Fourier et écrire cette somme sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

c) En déduire qu'il existe une constante A à déterminer telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad \cot an\, \pi \cdot x = A \cdot x \cdot \left(\frac{1}{2x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} \right)$$

(Formule dite du développement de cotangente en fractions simples).

2°) a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, développer $x \longmapsto \frac{1}{x^2 - p^2}$

en série entière en précisant son rayon de convergence R_p.

b) En déduire : $\forall x \in]-1,1[\qquad \cot an\, \pi \cdot x = A \cdot x \cdot \left(\frac{1}{2x^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,p} \cdot x^{2n} \right) \right)$,

en explicitant $c_{n,p}$.

c) Montrer que l'on a : $\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,p} \cdot x^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{n,p} \right) \cdot x^{2n}$.

(On pourra montrer que :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,p} \cdot x^{2n} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{k,p} \right) \cdot x^{2k} + r_n(x) ,$$

avec $|r_n(x)| \leq Z(2) \cdot \frac{x^{2n+2}}{1 - x^2} \longrightarrow 0$. $n \longrightarrow \infty$)

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

d) En déduire : $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$, $\cot \pi \cdot x = A \cdot x \cdot (\frac{1}{2x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^{2n})$,

et expliciter $\boxed{d_n}$ en utilisant la fonction Z.

3°) a) En faisant un développement limité généralisé de cotan $\pi \cdot x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, en déduire $\boxed{Z(2)}$, $\boxed{Z(4)}$ et $\boxed{Z(6)}$.

b) Les résultats théoriques étant acquis, la méthode de calcul est-elle plus simple que celle vue au I ?

III - NOMBRES DE BERNOULLI

1°) On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x}{e^x - 1} .$$

a) Donner le domaine de définition de h .

b) Montrer que h est prolongeable par continuité en posant $h(0) = \boxed{L}$ à déterminer.

c) Montrer que h s'écrit :

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{1}{1 + u(x)} ,$$

avec $\boxed{u}$ fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ à déterminer.

d) Montrer que h admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre n.

On notera $h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k + o(x^n)$,

les B_k sont appelés nombres de Bernoulli.

2°) On considère la fonction k définie par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^* \qquad k(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

a) Montrer que k est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

b) En écrivant : $\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) \cdot k(x) = 1$,

montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^* \qquad B_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} \cdot B_i$,

et déterminer $\boxed{B_0}$ et $\boxed{a_{n,i}}$.

Nous obtenons ainsi une méthode relativement rapide de détermination des B_n.

c) Déterminer $\boxed{B_1}$, $\boxed{B_2}$, $\boxed{B_3}$, $\boxed{B_4}$, $\boxed{B_5}$, $\boxed{B_6}$, $\boxed{B_7}$, $\boxed{B_8}$.

3°) a) Montrer que la fonction p définie par :

$$p(x) = h(x) - 1 + \frac{1}{2} x ,$$

est paire.

b) Que peut-on en déduire pour $\boxed{B_{2k+1}}$ pour $k \geq 1$.

IV

1°) a) Résoudre l'équation $e^z = 1$ pour $z \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que l'on peut prolonger la formule du III 1°) d) à $\mathbb{C}$, c'est-à-dire :

$$\forall\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \ , \ \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} z^k + o(z^n).$$

c) On considère la fonction complexe L définie par :

$$L(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} .$$

Montrer que cette fonction, convenablement prolongée par continuité à l'origine, admet un développement limité à tout ordre n au voisinage de 0 que l'on précisera.

d) Montrer que : $\forall\ z \in \mathbb{C} \qquad |z| < 1 \qquad L(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}$.

2°) a) En utilisant 1°) et en posant $z = 2i\pi x$, en déduire une expression du développement limité généralisé de cotan $\pi \cdot x$ en fonction des nombres de Bernoulli.

b) En comparant avec II 2°) d), et en utilisant l'unicité de ce développement, en déduire $\boxed{Z(2k)}$ en fonction des nombres de Bernoulli.

c) En déduire $\boxed{Z(2) \ , \ Z(4) \ , \ Z(6) \ , \ Z(8)}$.

d) Cette méthode est-elle plus rapide que les précédentes ?

INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS
Math 2
Page 175
1987